Références :
Oraux X-ENS Algèbre 3, Serge Francinou

Théorème (Pseudo-réduction simultanée)**.** *Soit S_1 et S_2 deux matrices symétriques réelles (resp. hermitiennes) de taille n, S_1 étant définie positive. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale réelle telles que*

$$^tPS_1P = I_n \text{ et } ^tPS_2P = D.$$

Proposition 1 (Inégalité de Minkowsky)**.** *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Si q est positive, alors, pour tout $x, y \in E$,*

$$\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

Lemme. *Soit A et B deux matrices symétriques réelles définies positives, α et β deux réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. On a donc*

$$det(\alpha A + \beta B) > (detA)^\alpha (detB)^\beta.$$

Démonstration. Le théorème de pseudo-réduction simultanée affirme l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et de $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ diagonale réelle telle que :

$$A =^t PP \text{ et } B =^t PDP.$$

Les λ_i sont strictement positifs car B est définie positive. On a donc

$$(detA)^\alpha (detB)^\beta = (detP^2)^\alpha (detP^2 detD)^\beta = detP^2 (detD)^\beta,$$

puisque $\alpha+\beta = 1$, et $det(\alpha A+\beta B) = detP^2 det(\alpha I_n+\beta D)$, c'est-à-dire que

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$$

ou encore, en prenant le logarithme, que

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) > \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) > \alpha \ln(1) + \beta \ln \lambda_i = \beta \ln \lambda_i$ par stricte concavité du logarithme. Il ne reste qu'à sommer les inégalités pour i allant de 1 à n. □

Théorème. *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

Démonstration. On rappelle qu'un ellipsoïde plein centré en 0 de $\mathbb{R}^n$ a une équation du type $q(x) \leq 1$, où q est une forme quadratique définie positive. On notera Q (resp. Q_+, resp. Q_{++}) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, resp. définies positives) de $\mathbb{R}^n$ et pour $q \in Q_{++}$, on pose $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$.

- Existence
  On commence par calculer le volume V_q de $\mathcal{E}_q$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ (avec $a_i > 0$). On obtient :

  $$V_q = \int\int ... \int_{a_1x_1^2+...+a_nx_n^2 \leq 1} dx_1...dx_n.$$

  On effectue le changement de variables défini par $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ (c'est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) dont le jacobien est $\frac{1}{\sqrt{a_1...a_n}}$. On observe que si S est la matrice de q dans une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = Pdiag(a_1, ..., a_n)^tP$. On a donc $detS = detDiag(a_1, ..., a_n) = a_1...a_n$. Ce déterminant ne dépend donc pas de la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ choisie. Notons-le $D(q)$. Le changement de variables dans l'intégrale donne donc :

  $$V_q = \int\int ... \int_{x_1^2+...+x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1...dx_n}{\sqrt{D(q)}} = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}},$$

  où V_0 désigne le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique. On va donc chercher à maximiser $D(q)$.
  On munit l'espace Q de la norme N définie par $N(q) = \sup_{||x||\leq 1} |q(x)|$. On considère maintenant l'ensemble

  $$\mathcal{A} = \{q \in Q_+, \forall x \in K, q(x) \leq 1\}.$$

  On cherche à maximiser D sur $\mathcal{A}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact non vide de Q.

▷ $\mathcal{A}$ est fermé.
Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathcal{A}$ dans Q vers q. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,$|q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n)||x||$ donc $\lim_{n\to+\infty} q_n(x) = q(x)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \lim_{n\to+\infty} q_n(x) \geq 0$$

et

$$\forall x \in K, q(x) = \lim_{n\to+\infty} q_n(x) \leq 1,$$

donc $q \in \mathcal{A}$.

▷ $\mathcal{A}$ est borné.
Comme K est d'intérieur non vide, il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $||x|| \leq r$ alors $a+x \in K$ donc $q(a + x) \leq 1$. De plus, on sait que $q(-a) = q(a) \leq 1$. Par l'inégalité de Minkowsky, on obtient :

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leq \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$

donc $q(x) \leq 4$. Si $||x|| \leq 1$, $|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2}q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$ ce qui montre que $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$.

▷ $\mathcal{A}$ est non vide.
Puisque K est compact, il est borné. Soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $||x|| \leq M$. Alors si q est définie par $q(x) = \frac{||x||^2}{M^2}$, on a, pour tout $x \in K, q(x) \leq 1$.

On a donc montré que $\mathcal{A}$ est un compact non vide de Q.
L'application déterminant est continue donc $q \mapsto D(q)$ est continue sur le compact $\mathcal{A}$. Elle atteint donc son maximum sur $\mathcal{A}$ en q_0. Comme $\mathcal{A}$ contient $x \mapsto \frac{||x||^2}{M^2}$ qui est définie positive, on a $D(q_0) > 0$ donc $q_0 \in Q_{++}$. Nous avons montré l'existence de l'ellispoïde.

- <u>Unicité</u>
Montrons que la forme quadratique trouvée q_0 est unique. Dans un premier temps, montrons que $\mathcal{A}$ précédemment définie est convexe.
Soit q et q' dans $\mathcal{A}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\lambda q + (1 - \lambda)q')(x) = \lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \geq 0$$

et $\lambda q + (1 - \lambda)q'$ est une forme quadratique positive. De plus, si $x \in K$,

$$(\lambda q + (1 - \lambda)q')(x) = \lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

ce qui entraîne que $(\lambda q + (1 - \lambda)q') \in \mathcal{A}$.
Supposons qu'il existe $q \in \mathcal{A}$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$. Soit S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, $\frac{1}{2}(q + q_0)$ appartient à $\mathcal{A}$. D'après le lemme, on a

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (detS)^{\frac{1}{2}}(detS_0)^{\frac{1}{2}} \geq detS_0 \geq D(q_0)$$

ce qui contredit la maximalité de $D(q_0)$.

□

Corollaire. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$. Il existe alors un produit scalaire associé à une forme quadratique q tel que $G \subset \mathcal{O}(q)$ où*

$$\mathcal{O}(q) = \{u \in GL(E) : q \circ u = q\}$$

Démonstration. Munissons E d'une norme euclidienne $||.||$ quelconque et notons B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour cette norme. Considérons l'ensemble

$$K = \{g(x), g \in G \text{ et } x \in B\}.$$

Cet ensemble est compact en tant qu'image du compact $G \times B$ par l'application continue $(g, x) \mapsto g(x)$. Il est d'intérieur non vide puisqu'il contient B (pour $g = \mathrm{Id}_E$).
Par le théorème précédent, on considère l'unique ellipsoïde $\mathcal{E}_q$ de volume minimal contenant K avec $q \in Q_{++}$.
Soit $g \in G$. Posons $q' = q \circ g$.
Montrons que $q' = q$.

- Montrons que $K \subset \mathcal{E}_{q'}$.
  Soit $y \in K$. Alors il existe $g' \in G$ et $x \in B$ tel que $y = g'(x)$. Alors,
  $$q'(g'(x)) = q \circ \underbrace{g \circ g'}_{\in G \text{ groupe}} (x) \leq 1 \text{ car } K \subset \mathcal{E}_q$$
  Ainsi, $K \subset \mathcal{E}_{q'}$.
- Montrons que $V_q = V_q'$ ce qui revient à montrer, par le calcul fait dans la preuve du théorème, que $D(q) = D(q')$.
  On sait que G est compact. Ainsi, l'application det est bornée sur $\{g^p, p \in \mathbb{Z}\}$.
  Or si $|\det(g)| > 1$, alors
  $$\lim_{p \to +\infty} |\det(g^p)| = \lim_{p \to +\infty} |\det(g)|^p = +\infty.$$
  Ainsi, $|\det(g)| \leq 1$.
  Si $|\det(g)| < 1$, alors
  $$\lim_{p \to -\infty} |\det(g^p)| = \lim_{p \to -\infty} |\det(g)|^p = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{|\det(g)|}\right)^p = +\infty.$$
  On obtient donc $|\det(g)| = 1$.
  Ainsi, on a $D(q') = D(q)\det(g)^2 = D(q)$.
  Par unicité, on obtient $q = q'$ d'où le résultat.

$\square$

Leçons possibles : 150 - 152 - 158 - 171 - 203 - 219 - 229 - 253

Questions posées :

- ▶ Qu'est ce qui permet d'avoir la première égalité sur V_q ? Réponse : le changement de variable a un jacobien égal à 1 donc le volume reste inchangé.
- ▶ Donner une application du théorème. Réponse : Un sous-groupe compact de $GL(E)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal pour une structure euclidienne de E.